

ẢNH HƯỞNG CỦA VẬN TỐC TẢI TRỌNG ĐỐI VỚI HIỆU ỨNG ĐỘNG LỰC CỦA KẾT CẤU NHỊP CẦU TRÊN ĐƯỜNG ÔTÔ

TS. Hoàng Hà
Bộ môn CTGTTP - Trường Đại học GTVT

Tóm tắt : Bài viết giới thiệu kết quả nghiên cứu ảnh hưởng của vận tốc khai thác của hoạt tải đối với các hiệu ứng động lực trong kết cấu nhịp cầu trên đường ô tô. Kết quả nghiên cứu có khả năng hỗ trợ việc thiết kế và kiểm toán năng lực chịu tải của các công trình cầu trên các tuyến đường cao tốc.

SUMMARY: The report presents recently researches about the dynamic behaviour of Beam-Bridges and Cable-Stayed Bridges under high speed moving vehicle. It is set up to help designers in dynamic analysis of Bridges on expressway in Vietnam.

1. MỞ ĐẦU

Trong quá trình công nghiệp hóa - hiện đại hóa ở nước ta hiện nay, giao thông vận tải đang giữ vai trò hết sức quan trọng, trong đó việc phát triển xây dựng hạ tầng cần đi trước một bước. Trong vài chục năm trở lại đây hàng loạt dự án xây dựng giao thông hiện đại đã, đang và sẽ được hoàn thành thực sự đã góp phần đáng kể làm chuyển đổi tốc độ phát triển kinh tế, xã hội, tăng cường củng cố an ninh, quốc phòng của đất nước.



Hình 1: Tuyến đường cao tốc Pháp Vân - Cầu Giẽ (Quốc lộ 1A)

Một trong các yêu cầu kỹ thuật cơ bản của các tuyến đường giao thông hiện đại là cải thiện và nâng cao năng lực thông xe trên tuyến, trong đó có yếu tố quan trọng là nâng cao tốc độ của các phương tiện vận tải. Tuy tốc độ khai thác của các phương tiện vận tải ở nước ta hiện nay chưa thực lớn, nhưng khái niệm về “vận tải cao tốc” đã đặt ra những yêu cầu mới về nâng cao mức độ an toàn cho người, phương tiện và các công trình trên tuyến, trong đó có các công trình cầu.

Bài viết này tiếp cận vấn đề nêu ra trên đây dưới góc độ phân tích mức độ ảnh hưởng của vận tốc tải trọng đến trạng thái ứng suất biến

dạng trong một số dạng kết cấu nhịp cầu trên đường ô tô. Nội dung nghiên cứu góp phần bổ trợ cùng các phương pháp tính toán khác trong công tác thiết kế cầu, đặc biệt là các cầu trên các tuyến giao thông cao tốc.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT NGHIÊN CỨU TÁC DỤNG ĐỘNG LỰC CỦA HOẠT TẢI

2-1. Các mô hình lý thuyết nghiên cứu tác dụng động lực của hoạt tải đối với kết cấu nhịp cầu.

Nghiên cứu tác dụng động lực do tải trọng di động trên công trình có ý nghĩa thực tế to lớn đối với việc thiết kế và xây dựng các công trình cầu. Bài toán này đã được các kỹ sư người Anh nghiên cứu lần đầu tiên vào năm 1847 sau sự cố đổ cầu Trester. Tuy nhiên do tính chất tác động của tải trọng di động phụ thuộc nhiều yếu tố như: vận tốc di động của tải trọng, sự va đập do không bằng phẳng của mặt cầu, dao động của hệ lò xo và các bộ phận giảm chấn của phương tiện vận tải, tỷ lệ giữa khối lượng của tải trọng và khối lượng của kết cấu... nên cho đến nay vấn đề vẫn ở trong số lớp bài toán phức tạp tiếp tục thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trên thế giới. Ý nghĩa thực tiễn của các lời giải cho bài toán trên phụ thuộc vào mức độ gần sát thực tế của mô hình nghiên cứu.

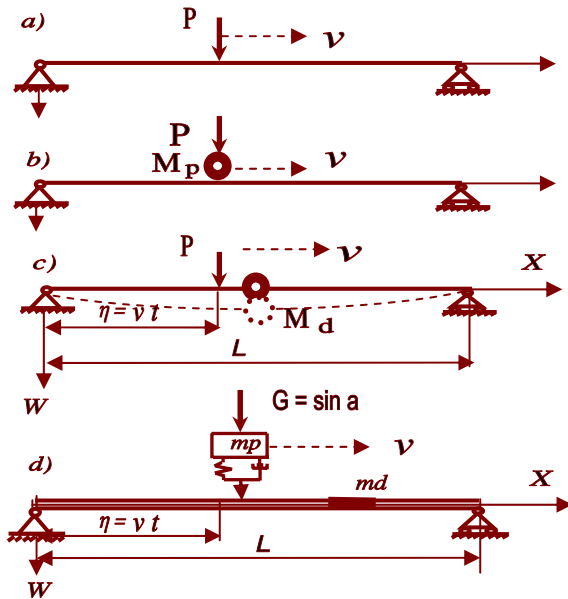
Đường lối nghiên cứu lý thuyết kết hợp thực nghiệm được đánh giá là có hiệu quả cao để giải quyết vấn đề này và đã được hàng loạt tác giả nghiên cứu thành công ở các mức độ khác nhau. Những kết quả được công bố gần đây có xu thế dần hoàn thiện mô hình tính toán gần sát thực tế hơn, có xét tới mối quan hệ tương tác động lực giữa kết cấu và tải trọng và đặc

biệt quan tâm một cách đầy đủ hơn tới ảnh hưởng của *nhân tố vận tốc di động của tải trọng*. Nguyên nhân được lý giải do sự phát triển của các tuyến vận tải cao tốc, trong khi tải trọng khai thác ngày càng có xu thế nặng hơn và di chuyển với vận tốc ngày càng cao hơn.

Về công cụ giải quyết bài toán có mức độ phức tạp cao nêu trên dựa vào sự phát triển của công nghệ thông tin với sự hỗ trợ của các công cụ tính toán mạnh.

Tác dụng của tải trọng khai thác di động trên cầu sẽ làm phát sinh trạng thái dao động của kết cấu. Hiệu ứng động lực phát sinh trong các bộ phận kết cấu trong quá trình hệ dao động thể hiện bằng sự gia tăng trị số ứng suất biến dạng trong hệ so với trạng thái tác dụng tĩnh của hoạt tải.

Bản chất vật lý của vấn đề chính là hiệu ứng quán tính do gia tốc dịch chuyển của khối lượng kết cấu và tải trọng di động trên chúng gây ra. Trên hình 2 giới thiệu các mô hình cơ bản nghiên cứu về dao động của kết cấu nhịp cầu dầm dưới tác dụng của tải trọng di động.



Hình 2: Các mô hình nghiên cứu

Mức độ phức tạp của các mô hình nghiên cứu trên hình 2 tăng dần theo các xu thế:

- + Từ bỏ qua khối lượng của vật thể di động và dầm (hình 2a) tới xét đồng thời cả khối lượng vật thể di động và dầm (hình 2d).
- + Mô hình rời rạc (quy về các khối lượng tập trung - hình 2c) đến mô hình liên tục (xét đến khối lượng rải đều của kết cấu hình 2d).

+ Từ đơn giản hóa đến xét cấu tạo thực tế của tải trọng di động gồm có khối lượng, đặt trên hệ lò xo và giảm chấn (hình 2d).

Mô hình toán học tương ứng cũng tăng dần mức độ phức tạp bằng việc tăng bậc cao của hệ phương trình vi phân mô tả dao động của cơ hệ. Với mô hình nghiên cứu trên hình 2d phương trình dao động có dạng một phương trình vi phân đạo hàm riêng cấp 5:

$$EJ_d \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \theta \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho F_d \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial W}{\partial t} \right) = p(x, z, t) \quad (1).$$

Các tác giả F. Willis, S.A. Iliaxevic, A.N. Krulov, Meizel, A.P. Philipov.... đã lần lượt công bố các lời giải với các mô hình khác nhau cho lớp bài toán trên.

Các kết quả nghiên cứu đã cho phép tính toán hiệu ứng động lực như độ võng động, mô men động, lực cắt động... phát sinh trong các bộ phận kết cấu ở thời điểm cần nghiên cứu trong quá trình cơ hệ dao động.

2-2. Tính toán hệ số động lực của hoạt tải

Mức độ khác biệt của giá trị nội lực và biến dạng phát sinh trong quá trình kết cấu dao động so với sự làm việc tương ứng của chúng ở trạng thái tĩnh được lượng hóa bằng khái niệm hệ số động lực $(1 + \mu)$:

$$(1 + \mu) = \frac{S_d}{S_t} \quad (2)$$

trong đó:

$(1 + \mu)$ - Hệ số động lực bằng tỷ số giữa hiệu ứng động phát sinh trong kết cấu (S_d) với hiệu ứng tĩnh tương ứng (S_t) do cùng hoạt tải gây ra.

Tuy nhiên trị số của hệ số động lực $(1 + \mu)$ lại biến động rất phức tạp phụ thuộc vào hàng loạt yếu tố:

- + Vị trí của tải trọng trên kết cấu
- + Bộ phận kết cấu và vị trí tiết diện khảo sát
- + Vận tốc tải trọng.
- + Tỷ lệ khối lượng giữa tải trọng và kết cấu.
- + Tham số cấu tạo đặc trưng của tải trọng như khối lượng, cấu tạo hệ giảm chấn...
- + Tham số cấu tạo của kết cấu.
- + Số lượng tải trọng di động trên cầu.

Như vậy có thể thấy rõ mức độ phức tạp của bài toán nghiên cứu ảnh hưởng của tác dụng

động lực do hoạt tải đối với các kết cấu nhịp cầu.

Mức độ tin cậy của các kết quả nghiên cứu lý thuyết cần được kiểm chứng bằng việc đối chiếu với các kết quả nghiên cứu thực nghiệm.

Phối hợp kết quả nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm là cơ sở xác định giá trị cực đại của hệ số động lực ($1+\mu$) đưa vào trong các Tiêu chuẩn thiết kế cầu.

Tuy nhiên theo kết quả nghiên cứu [1] việc xác định hệ số động lực của các qui trình thiết kế của các Quốc gia khác nhau lại không giống nhau. Nguyên nhân là do sự khác biệt về tiêu chuẩn tải trọng, cự ly của các xe cũng như quan điểm về mức độ dự trữ an toàn của mỗi nước. Có thể phân làm hai nhóm phương pháp tính chính:

• **Nhóm thứ nhất:** Hệ số động lực được tính theo công thức phụ thuộc vào chiều dài đặt tải của đường ảnh hưởng. Tiêu chuẩn thiết kế cầu của các nước Mỹ, Nga, Nhật bản, Pháp, Việt nam...đều chỉ dẫn các công thức tính toán hệ số động lực theo đường lối này. Tuy nhiên cấu tạo các công thức tính toán lại rất khác nhau tùy thuộc vào:

- + Loại tải trọng qua cầu: cầu đường sắt, cầu ô tô, cầu đi chung...
- + Dạng kết cấu: cầu dầm giản đơn, cầu dầm liên tục, cầu treo, cầu dây văng
- + Vật liệu kết cấu: cầu thép, cầu BTCT....

So sánh các phương pháp tính toán theo các qui trình nêu trên, công thức cho giá trị của hệ số động lực lớn nhất đều được cấu tạo theo một dạng công chung:

$$(1+\mu) = 1 + \frac{15}{37.5 + \phi L} + \beta \quad (3)$$

trong đó:

L - chiều dài đoạn đặt tải của đường ảnh hưởng chất tải (m).

ϕ - hệ số tùy theo công thức của mỗi qui trình lấy theo bảng 1.

Bảng 1

Tiêu chuẩn	Mỹ	Nga	Nhật bản	Pháp	Việt nam
ϕ	0.984	1.00	0.75	7.5	1.00

β - hệ số phụ thuộc vào tỷ số giữa khối lượng của hoạt tải tác dụng và khối lượng của kết cấu.

Hệ số này chỉ có trong Tiêu chuẩn thiết kế cầu của Pháp. Hệ số β có thể lấy bằng:

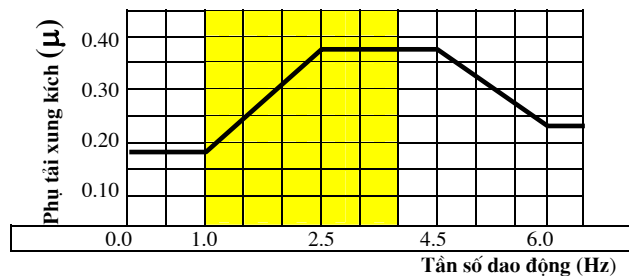
- $(0.058 \div 0.071)$ với cầu BTCT.
- $(0.120 \div 0.164)$ với cầu thép.

Kết quả nghiên cứu trong [1] cho thấy đối với các loại cầu dầm sai lệch về trị số của hệ số động lực tính toán theo các Tiêu chuẩn thiết kế của các nước khác nhau là không lớn (nhỏ hơn 3 %).

Đối với cầu treo và cầu dây văng một số Tiêu chuẩn thiết kế như Tiêu chuẩn CHuΠ 2-03-05-84 (Nga) và Quy trình thiết kế cầu 1979 (Việt nam) có công thức tính riêng và lớn hơn các Tiêu chuẩn của Mỹ, Nhật bản, Pháp từ (18-30)%.

Như vậy việc xác định hệ số động lực theo nhóm thứ nhất còn tồn tại những vấn đề cần nghiên cứu đầy đủ hơn.

• **Nhóm thứ hai:** Hệ số động lực lấy tùy thuộc vào tần số dao động của kết cấu. Đại diện cho cách tính này là các Tiêu chuẩn của Australia và Canada. Theo cách tính này phần phụ thêm của hệ số động lực được xác định theo biểu đồ giới thiệu trên hình 3.



Hình 3: Phụ tải xung kích theo Tiêu chuẩn Australia và Canada.

Cách tính hệ số động lực theo nhóm thứ hai khác biệt cả về nguyên tắc cũng như trị số so với các cách tính toán theo nhóm phương pháp thứ nhất. Điều cần lưu ý thêm là bên cạnh các chỉ dẫn về tính toán hệ số động lực, các Tiêu chuẩn thiết kế của Nga và Việt nam còn qui định khoảng trị không cho phép của chu kỳ (tần số) dao động tự do của kết cấu nhịp với ý nghĩa loại trừ khả năng xảy ra hiện tượng cộng hưởng (bảng 2)

Bảng 2

Tiêu chuẩn	Vùng cấm chu kỳ	Vùng cấm tần số
V. Nam	(0.3 ÷ 0.7) sec	(1.4 ÷ 3.3) Hz
Nga (84)	(0.45 ÷ 0.6) sec	(1.7 ÷ 2.2) Hz

Lưu ý tới khoảng trị nguy hiểm trên hình 3 và bảng 2 nhận thấy khoảng khác biệt lớn. Trong

khoảng trị của tần số dao động từ 2.2 Hz đến 4.5 Hz Tiêu chuẩn thiết kế của Nga và Việt nam không coi là vùng nguy hiểm trong khi các Tiêu chuẩn của Australia và Canada lại đưa vào vùng có tác dụng động lực nguy hiểm và lấy hệ số động lực lớn nhất (1.4)

3. ẢNH HƯỞNG CỦA VẬN TỐC TẢI TRONG TỐI HIỆU ỨNG ĐỘNG LỰC TRONG KẾT CẤU CẦU.

Ảnh hưởng của vận tốc khai thác đến trị số của hiệu ứng động lực trong kết cấu đã được R.Willis và Stokes đề cập lần đầu tiên thông qua công thức tính toán hệ số động lực:

$$(1 + \mu) = 1 + \frac{M_p L}{3EJ} v^2 \quad (4)$$

trong đó:

M_p - Khối lượng của tải trọng tác động

L- Chiều dài nhịp tính toán.

EJ- Độ cứng chống uốn của kết cấu

v- Vận tốc của tải trọng.

Tuy nhiên mô hình nghiên cứu của R.Willis và Stokes có ý nghĩa thực tế không lớn do giả thiết bỏ qua khối lượng của kết cấu.

Các nghiên cứu đầy đủ hơn của I.Liaxevic và A.N. Krulov cũng đã đề xuất công thức liên quan đến yếu tố vận tốc tải trọng:

$$(1 + \mu) = 1 + \frac{vL}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \quad (5)$$

trong đó m là khối lượng rải đều trên đơn vị dài của kết cấu nhịp.

Vận tốc tối hạn tương ứng với trạng thái có thể xảy ra cộng hưởng được tính theo công thức:

$$v_{th} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \quad (6)$$

Vận tốc tối hạn tính theo công thức (6) rất lớn nên hiện tượng cộng hưởng rất khó xảy ra. Tuy nhiên công trình nghiên cứu của I.Liaxevic và A.N. Krulov còn chưa đề cập tới một yếu tố quan trọng đó là khối lượng của tải trọng và mối tương quan giữa chúng và khối lượng của kết cấu.

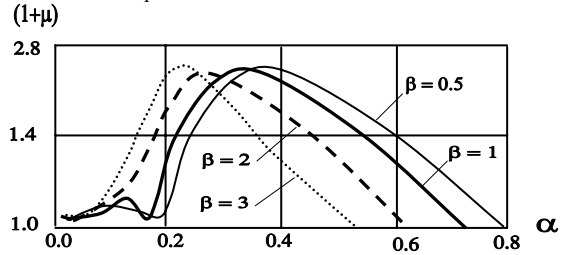
Phát triển kết quả nghiên cứu trên đây, các tác giả A.P. Philipov và một số tác giả khác đã nghiên cứu mô hình tổng quát xét động thời cả khối lượng của hoạt tải và dầm thông qua các tham số đặc trưng:

$$\alpha = \frac{vL}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \quad \text{và} \quad \beta_1 = \frac{M_p}{mL} \quad (7)$$

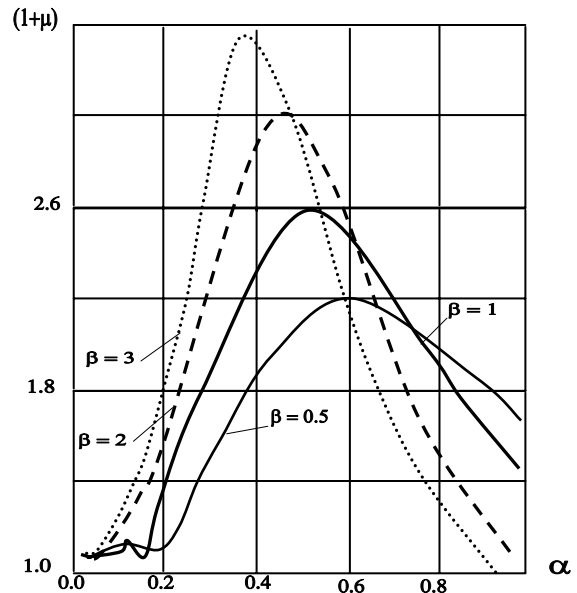
Để dàng nhận thấy α và β_1 là các đại lượng không thứ nguyên.

Biểu thức (7) cho thấy với cùng một loại kết cấu, một loại tải trọng và chiều dài nhịp nhất định, hệ số α sẽ được xác định phụ thuộc vào vận tốc di động của tải trọng.

Trên hình 4 và 5 giới thiệu kết quả nghiên cứu của A.P. Philipov về sự biến đổi hệ số động lực của độ võng tại mặt cắt dưới vị trí tải trọng và vị trí giữa nhịp dầm giản đơn phụ thuộc α và β_1 .



Hình 4: Sự thay đổi hệ số động lực của độ võng tại mặt cắt dưới tải trọng phụ thuộc vào α và β_1 .



Hình 5: Sự thay đổi hệ số động lực của độ võng tại mặt cắt L/2 phụ thuộc vào α và β_1 .

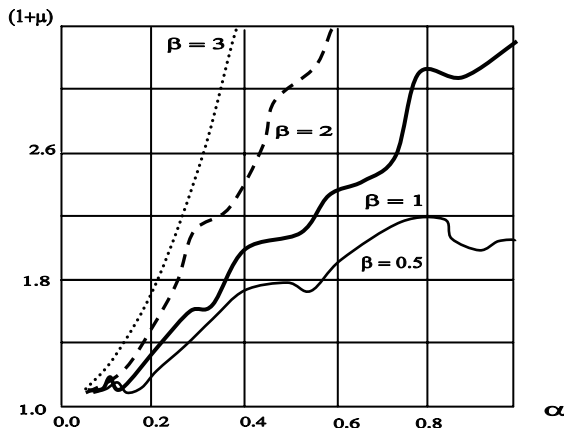
Trên hình 6 giới thiệu kết quả nghiên cứu tương ứng về hệ số động lực của ứng suất tại mặt cắt giữa nhịp của dầm.

Nhận xét thấy hệ số động lực của độ võng sẽ đạt cực đại tương ứng với một khoảng trị nhất định của α và tăng nhanh theo sự tăng của giá trị β_1 . Điều này cho thấy mức độ nhạy cảm dao động của các dạng kết cấu cầu có kết cấu thanh mảnh, tải trọng bản thân nhẹ như các dạng cầu treo, cầu dây văng.

Chú ý tới biểu thức của α có thể tìm được mối liên hệ với chu kỳ dao động tự do theo phương thẳng đứng của kết cấu:

$$\alpha = \frac{vL}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}} = \frac{v}{2L} \frac{2L^2}{\pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}} = \frac{v}{2L} T \quad (8)$$

Công thức (8) cho thấy với cùng một giá trị vận tốc thì hệ số động lực phụ thuộc vào chu kỳ dao động tự do của kết cấu. Cũng có thể nhận thấy sự tương đồng của dạng biểu đồ của hệ số động lực trên các hình 3, 4 và 5. Điều này cho phép nhận biết cơ sở xây dựng phương pháp tính hệ số động lực của các Tiêu chuẩn thiết kế cầu của Australia và Canada.



Hình 6: Sự thay đổi hệ số động lực của ứng suất tại mặt cắt L/2 phụ thuộc vào α và β_1 .

Không hoàn toàn theo qui luật của độ võng, hệ số động lực của ứng suất tăng nhanh theo tốc độ và khối lượng của tải trọng.

Phân tích trên đây đã cho thấy tính phức tạp và sự cần thiết của việc nghiên cứu đầy đủ hơn ảnh hưởng của vận tốc tải trọng tới sự biến đổi của hiệu ứng động lực trong kết cấu cầu.

4. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA VẬN TỐC TẢI TRONG ĐỐI VỚI MỘT SỐ DẠNG CÔNG TRÌNH CẦU Ở VIỆT NAM.

Trên cơ sở thuật toán và phần mềm tính toán trực tiếp hiệu ứng động lực phát sinh trong kết cấu với tải trọng và vận tốc di động bất kỳ, cho phép nghiên cứu ảnh hưởng của yếu tố vận tốc đến hiệu ứng động lực phát sinh trong kết cấu đã giới thiệu ở [1] đã tiến hành khảo sát cho một số dạng công trình cầu được xây dựng phổ biến ở Việt nam.

1. Dầm BTCT DƯỠNG chiều dài 33m.

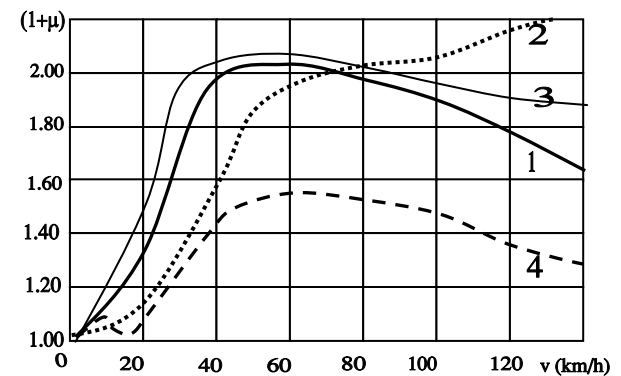
Các số liệu cơ bản:

- Chiều dài nhịp tính toán: $L=32.4m$
- Độ cứng chống uốn: $EJ = 13.975.464.000 \text{ N/m}^2$.
- Tĩnh tải rải đều bản thân dầm: $m = 2532 \text{ kg/m}$.
- Khối lượng của tải trọng tác dụng: 22.300 kg .
- Các tham số đặc trưng thay đổi theo sự biến đổi của vận tốc tải trọng ghi trong bảng 3.

Trên hình 7 thể hiện kết quả tính toán hệ số động lực của độ võng và của ứng suất động lực tại mặt cắt giữa ($L/2$) và mặt cắt $L/4$ của kết cấu nhịp dầm.

Bảng 3

Vận tốc	20 km/h	40 km/h	60 km/h	80 km/h	100 km/h	120 km/h
α	0.24	0.48	0.72	0.96	1.20	1.44
β	0.486					



Hình 7: Sự thay đổi hệ số động lực tùy thuộc vào vận tốc tải trọng

- 1- hệ số động lực của độ võng, m/c L/2
- 2- hệ số động lực của ứng suất, m/c L/2
- 3- hệ số động lực của độ võng, m/c L/4
- 4- hệ số động lực của ứng suất, m/c L/2

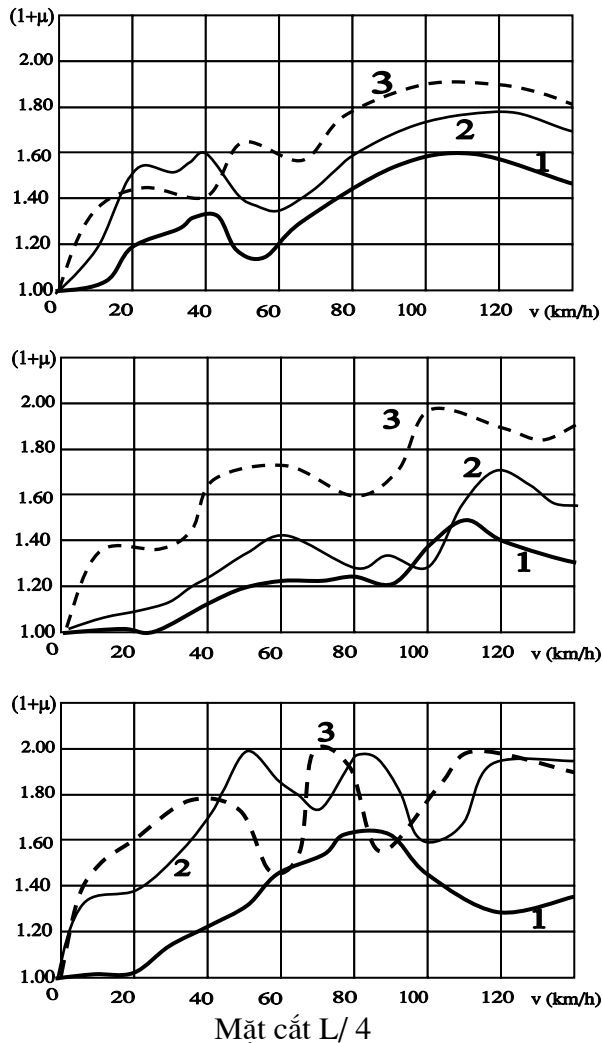
Kết quả trên hình 7 cho thấy vùng vận tốc bất lợi từ 35-80 km/h.

2. Kết cấu cầu dây văng nhịp trung bình.

Do cấu tạo cầu dây văng rất đa dạng nên trong bài viết này chỉ tập trung nghiên cứu cho một số công trình cầu dây văng nhịp trung bình 50-70m. Kết quả phân tích hệ số động lực thể hiện trên các hình 8.

Vùng nguy hiểm trên các biểu đồ của hình 8 gồm hai dải vận tốc thấp từ 30 - 50 km/h;

Vùng nguy hiểm ở mức cao từ 80 - 110 km/h. Mức độ ảnh hưởng do khối lượng của tải trọng thể hiện rõ nét.



Hình 8: Sự thay đổi hệ số động lực tùy thuộc vào vận tốc tải trọng và hệ số β_1

- 1- Hệ số động lực khi $\beta_1 = 2.5 \times 10^{-3}$
- 2- Hệ số động lực khi $\beta_1 = 3.5 \times 10^{-3}$
- 3- Hệ số động lực khi $\beta_1 = 4.5 \times 10^{-3}$

5. KẾT LUẬN

1. Ảnh hưởng của vận tốc khai thác tới hiệu ứng động lực phát sinh trong kết cấu cầu là một vấn đề phức tạp và cần tiếp tục nghiên cứu một cách đầy đủ hơn.
2. Giá trị của hệ số động lực biến đổi phức tạp không chỉ phụ thuộc vào sự thay đổi của vận tốc tải trọng mà còn phụ thuộc vào dạng

kết cấu và tỷ lệ giữa khối lượng của tải trọng và khối lượng của kết cấu. Điều này góp phần lý giải sự khác biệt của các công thức tính toán hệ số động lực phụ thuộc vào loại tải trọng, dạng kết cấu, vật liệu trong các Tiêu chuẩn thiết kế cầu của Nga, Nhật bản, Pháp, Việt nam...

3. Quá trình nghiên cứu đã phát hiện các vùng vận tốc nguy hiểm ở mức thấp (từ 30-50 km/h) và vùng vận tốc nguy hiểm ở mức cao (từ 80 -110 km/h). Tuy sự biến đổi của hệ số động lực tùy thuộc vào vận tốc khai thác của tải trọng khá phức tạp nhưng có thể nhận thấy khi vận tốc của tải trọng lớn hơn 80 km/h hệ số động lực tăng thêm khoảng 20% so với khoảng vận tốc khai thác nhỏ hơn 60 km/h.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Quy trình thiết kế cầu và cống theo các trạng thái giới hạn - Bộ GTVT, 1979.
- [2]. Tiêu chuẩn thiết kế cầu TCN -272-01- Bộ GTVT, 2001.
- [3]. Tiêu chuẩn AASHTO-96.
- [4]. Austroads-92.
- [5]. CHUΠ 02-03-05-84 (Nga)
- [6]. Hoàng Hà: Xác định hệ số động lực của hoạt tải trong tính toán công trình cầu - Chuyên đề NCS, 1998.
- [7]. Hoàng Hà, Vũ Đình Hiền: Một số vấn đề về phương pháp tính hệ số động lực ($1+\mu$) trong thiết kế các công trình cầu dầm giản đơn BTCT trên đường ô tô theo tiêu chuẩn mới 22TCN-272-01. Tạp chí GTVT 10/2002.
- [8]. Nguyen van Khang, Hoang Ha, Vu van Khiem, Do Xuan Tho: On the transverse vibration of beam-bridges under the action some moving bodies. In "IUTAM Symposium on Recent development in Non-linear Oscillations of Mechanical Systems", pp 187-195, Kluwer, Dordrecht-2000.
- [9]. Glen V. Berg: Vibration of Structures and Machines. Springer-Verlag, New York. USA-1993.